

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені Володимира Даля

МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійного виконання завдань
для студентів денної та заочної форм навчання за напрямом
"Екологія, охорона навколишнього середовища
та збалансоване природокористування"

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри
"Технології неорганічних
речовин та екології".
Протокол № 7 від 05.02.16

Сєверодонецьк, 2016

УДК 57.022

Методичні вказівки до практичних занять та самостійного виконання завдань з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» (частина 2) для студентів денної та заочної форм навчання за напрямом "Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування" / Уклад.: І.В. Кравченко. — Сєверодонецьк: СНУ ім. В. Даля, 2016. — 40 с.

Наведено методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» (частина 2) з прикладами рішення задач та варіанти індивідуального завдання.

Укладачі:

І.В. Кравченко, к.т.н., доц.

Відповідальний за випуск

О.В. Суворін, д.т.н., проф.

Рецензент

Н.К. Блінова, к.б.н., доц.

Зміст

ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	4
Питання для самоконтролю.....	7
ПРАКТИЧНА РОБОТА 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОПУЛЯЦІЙ. МОДЕЛЬ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО РОСТУ.....	8
Завдання 1.....	12
Приклад виконання завдання.....	12
Варіанти індивідуальних завдань.....	14
Завдання 2.....	16
Приклад виконання завдання.....	16
Варіанти індивідуальних завдань.....	18
ПРАКТИЧНА РОБОТА 2. МОДЕЛЬ ЗМІНИ ЧИСЕЛЬНОСТІ ПОПУЛЯЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ВНУТРІШНЬОВИДОВОЇ КОНКУРЕНЦІЇ (МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА)	19
Завдання 1.....	21
Приклад виконання завдання.....	21
Варіанти індивідуальних завдань.....	22
Завдання 2.....	23
Приклад виконання завдання.....	23
Варіанти індивідуальних завдань.....	26
Завдання 3.....	26
Приклад виконання завдання.....	27
Варіанти індивідуальних завдань.....	30
Питання для самоконтролю.....	31
ПРАКТИЧНА РОБОТА 3. СПРОЩЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОВІДНОСИН «ХИЖАК-ЖЕРТВА» В СПІВТОВАРИСТВІ	32
Завдання 1:	33
Приклад виконання завдання.....	34
Індивідуальне завдання.....	38
Література.....	39

Основні визначення та характеристики

Популяцію визначають як групу організмів одного виду, що займає конкретний простір (ареал) і функціонує як частина біотичного співтовариства. Основна ознака популяції як функціональної одиниці еволюції - ймовірність обміну генетичною інформацією, яка істотно вище, ніж середня внутрішньовидова.

Популяція представляє собою форму існування виду, що забезпечує пристосованість його до конкретних умов середовища проживання, включаючи взаємини з іншими видами. Найбільш близьким за значенням до популяції є відоме з курсу історії поняття "плем'я".

Основними екологічними характеристиками популяції є:

- величина популяції по займаному простору (ареалу) і за чисельністю особин;
- структура популяції - вікова, статева, просторова;
- динаміка популяції - зміна ознак з плином часу.

Популяція володіє багатьма ознаками, які характеризують її як ціле: чисельність, народжуваність, смертність, віковий і статевий склад, характер розподілу в межах ареалу.

Чисельність популяції - кількість особин на одиницю площі або об'єму - ніколи не буває довільною і постійною протягом тривалого часу, і змінюється в межах певного діапазону, згідно з правилом Ю. Одума: існують певні верхні і нижні межі чисельності популяції, які дотримуються в природі в умовах стабільності середовища проживання.

Залежність чисельності популяції від середовища проживання встановлює правило К.Фрідерікса (1927): регулювання чисельності популяції є результат комплексу впливів абіотичного і біотичного середовища в місці проживання виду.

Видову здатність до розмноження при відсутності обмежень з боку середовища характеризує біотичний потенціал популяції.

У даних конкретних умовах живі організми прагнуть максимально реалізувати свій біотичний потенціал, тобто в кожній популяції є тенденція до утворення теоретично максимально можливої кількості нових особин.

Зростання популяцій організмів в природних умовах обмежується запасами їжі і доступним простором, придатним для місцеперебування - тобто ємністю середовища або впливом лімітуючих (обмежуючих) чинників - опором середовища. Причому ці фактори впливають на чисельність опосередковано, через зміну системи біотичних взаємодій. Звідси можна зробити висновок, що існує межа, яка представляє собою максимальну чисельність, до якого буде нескінченно прагнути крива зростання популяції (рис.1).

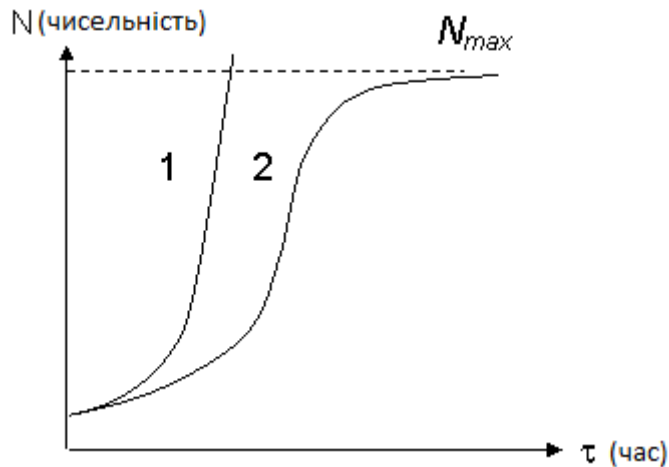


Рис.1. Ріст чисельності популяції: 1 – крива біотичного потенціалу $\frac{dN}{d\tau} = rN$, 2 – логістична крива $\frac{dN}{d\tau} = rN\left(\frac{N_{max}-N}{N_{max}}\right)$

Простір між кривими - опір середовища.

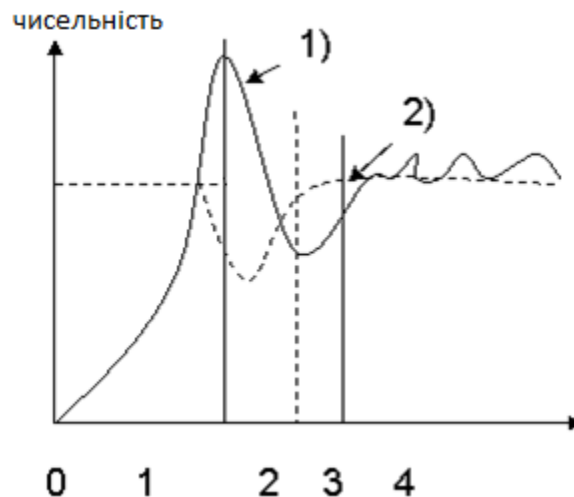


Рис. 2. Розвиток популяцій в надлишковому по ресурсах середовищі: 1) крива зміни чисельності; 2) крива зміни ємності середовища.

Область 1 (рис. 2) - перша фаза розвитку популяції - необмежене (експонентне) зростання чисельності; область 2 - друга фаза розвитку - катастрофічне зниження чисельності внаслідок різкого зменшення біологічної ємності середовища; область 3 - логістична крива зростання чисельності, регульованою біологічною ємністю середовища - число особин досягає максимального значення; в 4-й області відбуваються невеликі коливання чисельності близько середнього значення, що задається ємністю середовища.

Для зростання чисельності популяцій велике значення має співвідношення особин за статтю та віком - статеві і вікова структура популяцій. Аналіз вікової та статевої структури популяції дозволяє прогнозувати її чисельність на ряд

найближчих поколінь і років. Цим користуються для оцінки можливості промислу риби, в мисливських господарствах, для вивчення впливу умов життя на вигляд популяцій. Зростання або регрес чисельності популяції залежить від її власних ознак: співвідношення показників числа народжень (народжуваності) і числа смертей (смертності), статевої структури популяції, а безперервність або періодичність коливань чисельності визначається віковою структурою.

Динаміка популяцій - це процеси зміни основних біологічних показників в часі залежно від екологічних факторів. Вважається, що біотичний потенціал практично будь-якого з живучих на Землі видів достатній, щоб заселити всю планету при достатку їжі, води, простору, сталості умов середовища і відсутності хижаків. Ця ідея була висунута в 1798 р англійським демографом і економістом Томасом Р. Мальтусом (1766 - 1834) у праці «Про закон зростання народонаселення», який встановив, що чисельність популяції людини росте по експоненті (в геометричній прогресії). Відповідна математична модель має назву "модель Мальтуса" або модель експоненціального зростання. Така модель заснована на допущенні, що зростання популяції не залежить від її щільності - тобто перенаселення простору неможливо.

Інший розвиток отримує ситуація при обмеженості харчових ресурсів або при скупченні токсичних продуктів (відходів) метаболізму. Початкове експоненціальне зростання у вихідних умовах тривати не може і поступово сповільнюється. Щільність популяції - тобто чисельність особин на одиницю площі (одиницю об'єму) - регулює стан харчових ресурсів, ступінь накопичення токсикантів - і тому впливає на ріст чисельності. Зі збільшенням щільності швидкість росту популяції поступово знижується до нуля і S-подібна крива виходить на деякий стабільний рівень. Цей варіант розвитку популяцій вперше описаний бельгійським математиком П'єром Франко Ферхюльстом (1804 - 1849) в 1838 р (задовго до виникнення екології як цілісної науки) і незалежно від нього - американськими дослідниками Раймондом Пірлом (1879 - 1940) і Лоуеллом Дж. Рідом (1886 - 1866) в 1920 р. Відповідна модель росту популяції з урахуванням внутрішньовидової конкуренції носить назву "модель Ферхюльста", а рівняння логістичного зростання найчастіше називають рівнянням Ферхюльста - Пірла (рис.1).

Коли популяція досягає максимуму чисельності, її щільність виявляє тенденцію до флуктуацій щодо верхнього асимптотичного рівня зростання. Такі флуктуації можуть виникати або в результаті змін фізичного середовища, внаслідок чого підвищується або знижується верхня межа чисельності, або в результаті внутрішньопопуляційних взаємодій, або, нарешті, в результаті взаємодії з сусідніми популяціями. Після того, як верхня межа чисельності популяції виявиться досягнутою, щільність може деякий час залишатися на цьому рівні або відразу різко впасти. Це падіння виявиться ще різкішим, якщо опір середовища збільшується не поступово, у міру росту популяції, а проявляється раптово. У такому випадку популяція буде реалізовувати біотичний потенціал.

Однак експоненціальне зростання не може відбуватися довго. Коли експонента досягає парадоксальної точки прагнення до нескінченності, як

правило, відбувається якісний стрибок - швидке збільшення чисельності змінюється масовим відмиранням клітин або загибеллю особин.

Приклад подібних флуктуацій - розмноження і загибель водоростей - "цвітіння" водойм. Можлива і така ситуація, при якій чисельність популяції перевищує граничний рівень, якщо поживні речовини та інші, необхідні для життя фактори, накопичені ще до початку росту популяції. Цим, зокрема, можна пояснити, чому нові ставки і озера часто багатші рибою, ніж старі.

У освоєному місці проживання виділяють три основних типи динаміки чисельності популяції: стабільний, лабільний і ефемерний.

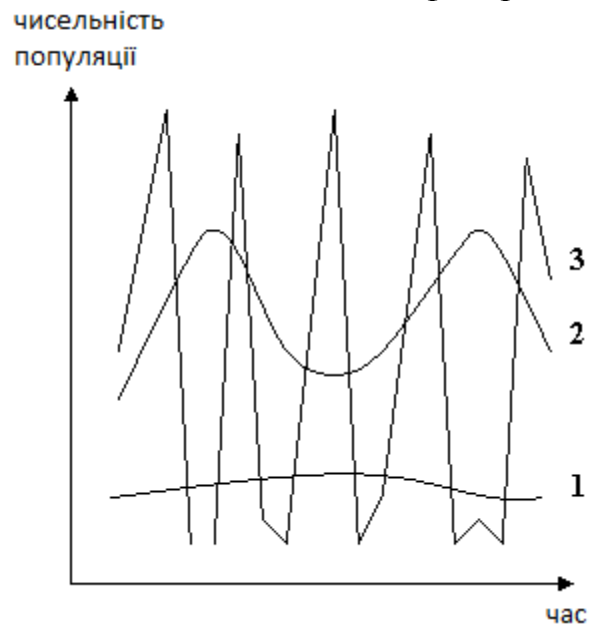


Рис. 3. Типи динаміки чисельності популяцій: 1 - стабільний тип динаміки чисельності (невеликі коливання добре адаптованих до середовища популяцій, період коливань 10-20 років); 2 - лабільний тип динаміки чисельності (з періодом коливань 5-11 років); 3) ефемерний тип (різкі часті коливання за період 4-5 років).

До стабільного типу динаміки чисельності належать великі і довгоживучі тварини з невеликою кількістю нащадків і низькою щорічною смертністю: кити і дельфіни, людиноподібні мавпи, орли, деякі рептилії, великі копитні та інші тварини. Лабільний тип динаміки характерний для тварин, які доживають до 10 - 15 років, з більш високою плодючістю і смертністю: великі гризуни, зайцеподібні, деякі хижаки, великі птахи, комахи з довгим циклом розвитку. Ефемерний тип характерний для короткоживучих (до 3-х років) плідних тварин з високим ступенем загибелі: дрібні гризуни, комахи та інші.

Питання для самоконтролю

1. Як дати визначення популяції і описати її властивості?
2. Чому елементарною частинкою еволюції є популяція?
3. Які критерії популяцій вам відомі?
4. Як формуються правила Ю.Одума і К.Фрідерікса?

5. Чим визначається біотичний потенціал популяції?
6. Що таке опір середовища?
7. Які екологічні причини, що викликають зростання чисельності популяцій по експоненті і логістичній кривій?
8. Які екологічні фактори викликають саморегуляцію щільності популяції?
9. Яке значення групових характеристик популяції для охорони біорізноманіття?
10. Якщо популяція реагує на власну високу щільність зниженням народжуваності, то чому можливо надмірне розмноження шкідників на полях і в садах?
11. Чому у спільнотах, створених людиною, частіше спостерігаються спалахи чисельності комах - шкідників?
12. У якої популяції рослин більше шансів на виживання: складається з проростків? з проростків, молодих і дорослих особин? Відповідь обґрунтуйте.
13. Яку інформацію про популяції необхідно зібрати, щоб встановити норму вилову цінного виду риб?
14. Яким чином характер розподілу популяції в межах ареалу впливає на її стійкість?

Практична робота 1. Основні властивості популяцій.

Модель експоненціального росту

Мета: вивчити основні властивості популяцій: структуру, динаміку, біотичний потенціал; ознайомитися з методами обробки та аналізу результатів натурних спостережень.

Основні поняття і кількісні закономірності. При проведенні будь-яких кількісних досліджень важливо з великим ступенем точності дати оцінку чисельності організмів. *Чисельність популяції* - загальна кількість особин, що складають дану популяцію в певний момент часу. Мінімальна кількість особин, при якому популяція не зникає з екологічних і генетичних причин визначає нижню межу виживання. В цілому, в сучасних умовах стійка популяція налічує кілька тисяч особин, хоча для різних видів нижня межа виживання різна. Якщо дозволяють умови місцеперебування і спосіб життя організмів застосовуються методи прямого обліку. На першому етапі досліджень, як правило, за допомогою аерофотозйомки, визначаються межі і площа ареалу. У середині ареалу виділяють квадрати рівної площі і на кожному з них підраховують число особин (X_i) по статевим і віковим категоріям - тобто робиться вибірка (n).

Щільність популяції (\bar{X}) - це кількість особин або біомаси на одиницю площі або об'єму - визначається як середнє арифметичне з усіх вибірок (n):

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \quad (1)$$

де \bar{X} - щільність популяції, X_i - число особин у вибірці, n - число вибірок.

Загальна чисельність організмів (N) в популяції визначається як добуток щільності популяції на площу ареалу:

$$N = \bar{X} \cdot S \quad (2)$$

де N - чисельність популяції, S - площа ареалу.

Просторовий розподіл популяції всередині ареалу носить імовірнісний характер і відображає реакції організмів на різні екологічні фактори: доступність харчових ресурсів і фізичні умови або на присутність конкурентів, і тому є важливою характеристикою популяції, необхідною для прогнозу її чисельності. Виділяють три основні типи розподілу організмів у межах території, зайнятій однією популяцією:

рівномірний розподіл в природі найчастіше пов'язаний з гострою конкуренцією між різними особинами. Такий тип розподілу відзначають у хижих тварин і риб з їх територіальним інстинктом і суто індивідуальним характером;

випадковий (дифузний) розподіл має місце в однорідному середовищі або середовищі, де інтенсивність і напрямок дії різних екологічних факторів змінюються не закономірно, а випадково. Так на перших порах розселяється попелиця на полі. У міру зростання популяції розподіл набуває груповий характер;

груповий (мозаїчний) розподіл зустрічається найчастіше. Так, в сосновому лісі дерева спочатку розселяються групами, а надалі їх розміщення стає рівномірним. Груповий розподіл забезпечує більш високу стійкість по відношенню до несприятливих умов у порівнянні з окремою особиною. Усередині популяцій тварин угруповання носять різні назви - прайди, гареми, зграї, колонії і так далі.

Характер просторового розподілу оцінюється за величиною дисперсії, що характеризує відхилення значень відносно середнього значення:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(\bar{X} - X_i)^2}{n-1}; \quad (3)$$

де σ^2 - дисперсія.

Якщо дисперсія $\sigma^2 = 0$, розподіл вважають рівномірним; при $0 < \sigma^2 \leq \bar{n}$ - розподіл випадковий; якщо $\sigma^2 > \bar{n}$ - розподіл груповий (скупчений).

Щільність і чисельність популяції залежать від величин народжуваності і смертності особин.

Народжуваність - здатність популяції до збільшення чисельності. Розрізняють народжуваність абсолютну (B) - число нових особин за одиницю часу

і питому (b від англ. Birth - «народження») - коефіцієнт народжуваності - число нових (народжених) особин на одну особину в одиницю часу:

$$B = \frac{B_N}{\Delta\tau}; \quad b = \frac{B}{N}; \quad (4)$$

де B_N - число актів народжень в популяції за весь період спостережень $\Delta\tau$, B - народжуваність в одиницю часу, b - питома народжуваність.

Смертність визначають кількістю особин, загиблих за певний період часу. Смертність схильна до більш різких коливань, ніж народжуваність і грає головну роль у регулюванні чисельності популяцій. Абсолютна смертність (D) - це число особин, загиблих в одиницю часу, питома смертність (d від англ. death - «загибель») - коефіцієнт смертності - відношення абсолютної смертності до чисельності популяції:

$$D = \frac{D_N}{\Delta\tau}; \quad d = \frac{D}{N}, \quad (5)$$

де N - число актів загибелі за весь період спостережень ($\Delta\tau$); D - смертність в одиницю часу; d - питома смертність.

Динаміка чисельності безпосередньо пов'язана з віковою структурою популяції. По відношенню до популяції виділяють три екологічні віки: *дорепродуктивний*, *репродуктивний* і *пострепродуктивний*. У популяціях, що скорочуються, переважають старі особини, які вже не здатні приносити потомство. Така вікова структура свідчить про несприятливі умови. У швидко зростаючих популяціях переважають молоді особини, що інтенсивно розмножуються. У стабільних популяціях це співвідношення, як правило, 1:1. При сприятливих умовах в популяції є всі вікові групи, і підтримується порівняно стабільний рівень чисельності, значну частку якої складають молоді статевозрілі особини. Вікова структура популяції визначається на підставі даних спостережень по вибірках (n):

$$N = \left(\frac{\sum X_i}{n_i} \right) \cdot S; \quad (6)$$

де N - загальна чисельність даної вікової групи; n_i - число особин цієї вікової групи у вибірці.

Вікова структура популяції, як правило, представляється у вигляді діаграм, в яких площа кожного прямокутника співвідноситься з числом особин інших вікових груп в одному й тому ж масштабі.

Смертність в різних вікових групах неоднакова і залежить від виду популяції. Зміни, що відбуваються в популяції (виді) у міру дорослішання і старіння особин, зображують у вигляді кривих виживаності (рис. 4):

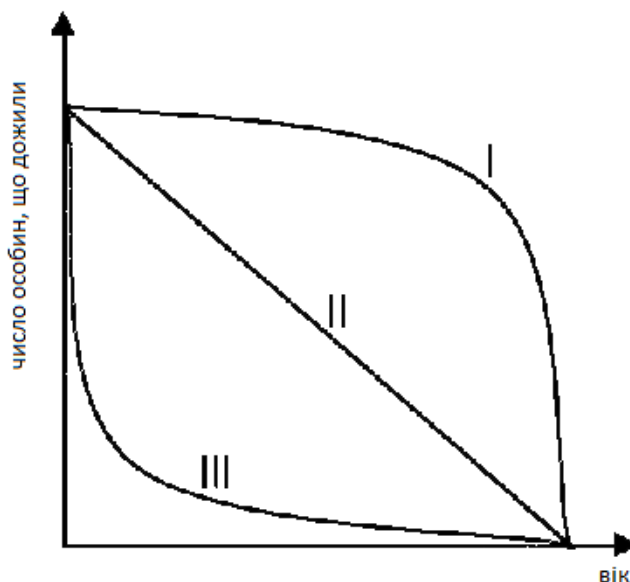


Рис.4. Основні типи кривих виживаності:

I - смертність слабо залежить від зовнішніх чинників (популяції великих тварин і людини в сприятливих умовах); II - рівномірна смертність у всіх вікових групах (потомство веде самостійний спосіб життя); III - висока смертність в ранні періоди життя.

Біотичний потенціал популяції можна описати за допомогою простих рівнянь - модель *Мальтуса*. Побудова цієї моделі заснована на декількох припущеннях: не враховуються фізіологічні та біохімічні процеси в популяції; розглядаються тільки процеси народження і природної загибелі, швидкості яких пропорційні чисельності особин в даний момент часу; розглядається одна популяція, без урахування взаємодії з іншими популяціями. Так, в популяції з вихідною чисельністю N_0 особин, за проміжок часу $\Delta\tau$ з'являється ΔN нових особин. Якщо число особин, що народилися, прямо пропорційно N_0 і $\Delta\tau$, то маємо рівняння:

$$\Delta N = r \cdot \Delta\tau \cdot N_0 \quad \text{або} \quad \frac{\Delta N}{\Delta\tau} = r \cdot N_0, \quad (7)$$

де r – біотичний потенціал популяції (мальтузіанський параметр) або питома швидкість росту чисельності.

Питома швидкість росту чисельності (приріст популяції) розраховується як різниця між питомою народжуваністю та питомою смертністю:

$$r = b - d, \quad (8)$$

де b - питома народжуваність, d - питома смертність (4,5).

У диференціальній формі рівняння росту:

$$\frac{dN}{d\tau} = r \cdot N,$$

а розв'язанням цього рівняння (інтегральною формою) – є функція

$$N(\tau) = N_0 \cdot e^{r\tau}, \quad (9)$$

де e - основа натурального логарифма.

У випадку, коли народжуваність менше смертності, процес зміни чисельності називається експоненціальним загасанням.

Завдання 1: використовуючи дані натурних спостережень (табл.1), опишіть популяцію живих організмів за планом:

- Визначте середню чисельність популяції.
- Виявіть характер розподілу популяції по основній території.
- Встановіть вікову структуру популяції; побудуйте діаграму.
- Побудуйте графічну модель біотичного потенціалу популяції.
- Визначте час $T_{0,5}$, коли чисельність особин зміниться в два рази в порівнянні з початковою і порівняйте з розрахунковою величиною $T_{0,5} = \ln 2 / r$.
- Зробіть висновок про ступінь сприятливості умов існування популяції і дайте прогноз її розвитку.

Приклад виконання завдання

Таблиця 1

Вид:	Число особин (X_i) у вибірках (n), од./км ²										Народжуваність, B , од./рік	Смертність, D , од./рік	Площа ареалу, S , км ²	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
Японський журавель														
пташенят	4	5	4	1	9	4	4	4	10	3	55	10	20	
дорослих	6	2	6	3	6	6	8	10	6	2				
пострепродуктивних	0	5	0	1	5	0	0	1	2	4				

1. Для знаходження чисельності, розрахуємо середню щільність популяції (1):

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{10+12+10+5+20+10+12+15+18+9}{10} = 12,1 \text{ од./км}^2.$$

2. Розрахуємо чисельність популяції (2):

$$N_0 = \bar{X} \cdot S = 12,1 \cdot 20 = 242 \text{ особини.}$$

3. Визначаємо характер розподілу популяції по основній території. Для цього розрахуємо дисперсію (3):

$$\sigma^2 = \frac{\sum(\bar{X}-X_i)^2}{n-1} = \frac{(12,1-10)^2+(12,1-12)^2+(12,1-10)^2+(12,1-5)^2+(12,1-20)^2+(12,1-10)^2+(12,1-12)^2+(12,1-15)^2+(12,1-18)^2+(12,1-9)^2}{10-1} = \frac{216,9}{9} = 24,1$$

Порівняємо значення дисперсії σ^2 і щільності популяції:

$$24,1 > 12,1;$$

отже, розподіл по території груповий (зграями).

Визначимо вікову структуру популяції. Для цього розрахуємо чисельність пташенят (N_p), дорослих (N_r) і особин пострепродуктивного віку (N_{hr}) (6):

$$N_p = \frac{48}{10} \cdot 20 = 96 \text{ особин}; \quad N_r = \frac{55}{10} \cdot 20 = 110 \text{ особин}; \quad N_{hr} = \frac{18}{10} \cdot 20 = 36 \text{ особин}$$

Побудуємо діаграму вікової структури популяції (рис.5)

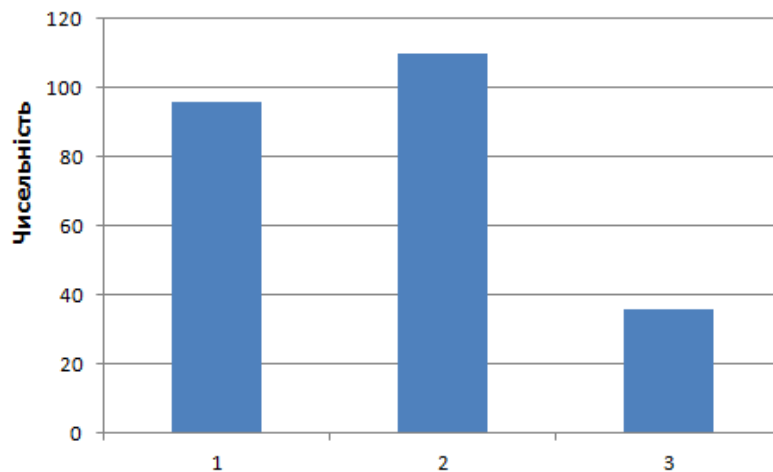


Рис. 5. Вікова структура популяції

Побудуємо модель біотичного потенціалу популяції, для цього розрахуємо питому народжуваність в популяції (4):

$$b = \frac{B}{N} = \frac{55}{242} = 0,23;$$

питому смертність (5):

$$d = \frac{D}{N} = \frac{10}{242} = 0,04;$$

визначимо біотичний потенціал (8):

$$r = b - d = 0,23 - 0,04 = 0,19.$$

Використовуючи рівняння росту біотичного потенціалу $N_t = N_0 \cdot e^{rt}$, розрахуємо 10-12 значень N_t , вибравши відповідні часові інтервали, і складемо таблицю:

Таблиця результатів розрахунку N_t

τ , рік	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
N_t , особин	293	428	626	915	1338	1957	2861	4184	6118	8946	13081

Побудуємо графік за допомогою ПК (рис. 6).

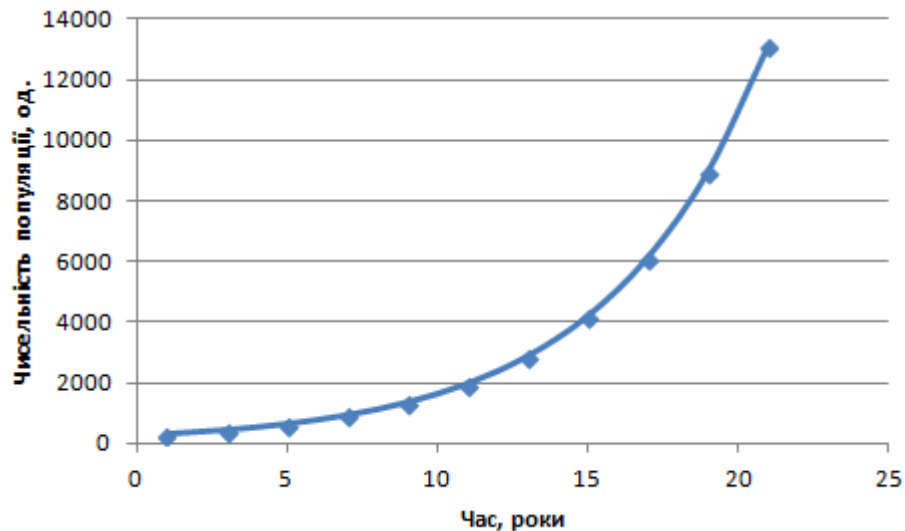


Рис.6. Залежність чисельності популяції від часу

Висновок: позитивний біотичний потенціал і рівномірна вікова структура свідчать про стійкість популяції в даних умовах проживання. При відсутності лімітуючих факторів та взаємодії з іншими популяціями чисельність цього виду живих організмів здатна збільшитися за 20 років з 242 до майже 13 000 особин.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Вид організмів	Чисельність в вибірках, од/км ²										B, од/год	D, од/год	S, км ²
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Горобець домашній: пташенят дорослих пострепр.	7	0	15	6	0	7	10	12	0	8	162,5	132	25
		8	2	8	8	12	8	6	8	6	8			
		0	0	2	1	0	0	0	0	4	1			
2	Горобець лісовий: пташенят дорослих пострепр.	5	0	0	6	6	7	10	2	0	5	118,3	110	23,2
		4	0	8	8	6	8	6	2	1	3			
		1	2	0	1	2	1	2	6	1	3			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	Сорока: пташенят дорослих пострепр.	4 2 1	0 2 1	2 4 0	3 2 1	6 6 2	1 8 0	1 9 0	4 2 3	1 1 0	6 2 2	126	108	45
4	Білка звичайна: дитинчат дорослих пострепр.	12 8 4	8 12 2	6 14 2	12 8 0	5 10 0	0 14 6	8 10 4	6 12 4	8 8 4	10 12 0	112,5	67	20
5	Їжак амурський: дитинчат дорослих пострепр.	2 10 3	4 8 0	3 8 2	4 10 1	6 6 3	2 10 0	4 8 2	4 8 2	4 8 2	6 6 3	75	58	20
6	Землерийка: дитинчат дорослих пострепр.	8 2 0	6 4 0	6 4 2	8 2 0	8 4 2	3 2 0	6 3 1	7 4 1	6 4 2	8 2 2	250	120	35
7	Їжак вухатий: дитинчат дорослих пострепр.	4 2 2	6 2 0	3 5 0	6 2 0	4 2 2	6 2 5	8 6 2	5 3 2	6 4 0	4 2 0	124	66	21,8
8	Стриж: пташенят дорослих пострепр.	20 25 5	15 15 0	16 11 3	14 3 3	16 25 5	14 7 2	14 5 5	12 12 8	25 10 5	25 20 2	280	82	14,2
9	Трясогузка гірська: дитинчат дорослих пострепр.	8 4 0	8 3 0	10 4 2	2 2 0	4 6 0	0 8 0	4 2 0	6 2 0	0 6 0	0 6 2	85	12	25
10	Заєць-біляк: дитинчат дорослих пострепр.	0 2 4	0 6 0	2 4 2	4 2 2	0 6 2	0 3 2	4 2 1	0 2 2	4 2 2	3 6 2	70	76	20
11	Амурський тигр (од. / тис.км ²): дитинчат дорослих пострепр.	2 1 0	0 0 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0	0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 0	1 1 0	6	7	45*10 ³
12	Далекосхідний леопард (од. / тис.км ²): дитинчати дорослих пострепр.	1 1 0	0 0 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0	0 0 1	1 1 0	0 0 0	0 0 1	0 1 0	11	17	30*10 ²
13	Ведмідь гімалайський (од. / тис.км ²): дитинчат дорослих пострепр.	3 2 0	0 2 1	0 0 1	2 1 1	0 3 1	1 1 0	4 2 1	2 1 0	0 1 1	3 1 0	52	44	30*10 ²
14	Вовк (од. / тис.км ²): дитинчат дорослих пострепр.	4 8 2	0 0 1	3 9 1	4 12 3	0 6 2	1 5 1	0 0 1	6 7 2	0 5 1	4 11 3	70	55	33*10 ²

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	Ізюбр (од. / тис.км ²): дитинчат дорослих пострепр.	6 12 2	0 0 1	8 21 5	16 22 4	0 0 0	2 4 0	0 0 0	3 7 2	8 14 5	0 8 1	166	112	90*10 ²

Завдання 2: З метою вивчення динаміки евтрофікації водойм, забруднених мінеральними добривами, у п'яти ставках моделювали розмноження синьо-зелених водоростей у не лімітованих (необмежених) умовах. Отримані дані про зміну чисельності популяції водоростей у кожному ставку представлені в таблиці 2. На основі цих даних визначити для популяції водоростей у кожному ставку значення мальтузіанського параметра r (питомої швидкості розмноження) та період зростання вдвічі T . Знайти також відповідні медіани по отриманим вибіркам r і T .

Таблиця 2

Час, τ , години	Титр кліток водоростей, кл./мл				
	Ставок 1, x_1	Ставок 2, x_2	Ставок 3, x_3	Ставок 4, x_4	Ставок 5, x_5
0	135	171	60	252	106
24	245	270	113	371	201
48	374	491	186	710	275
72	545	693	269	1088	451
96	839	1163	447	1772	689
120	1544	1788	796	2534	1304
144	2392	3460	1024	4842	2161
168	3433	4704	2131	6478	3386
192	6586	8526	3107	10429	5326
216	10129	13198	4351	19953	8928

Приклад виконання завдання

Нелімітований ріст чисельності популяції описується експоненціальний функцією Мальтуса:

$$N(\tau) = N_0 \cdot e^{r\tau},$$

де N_0 – початкова чисельність популяції, r – мальтузіанський параметр, τ – час

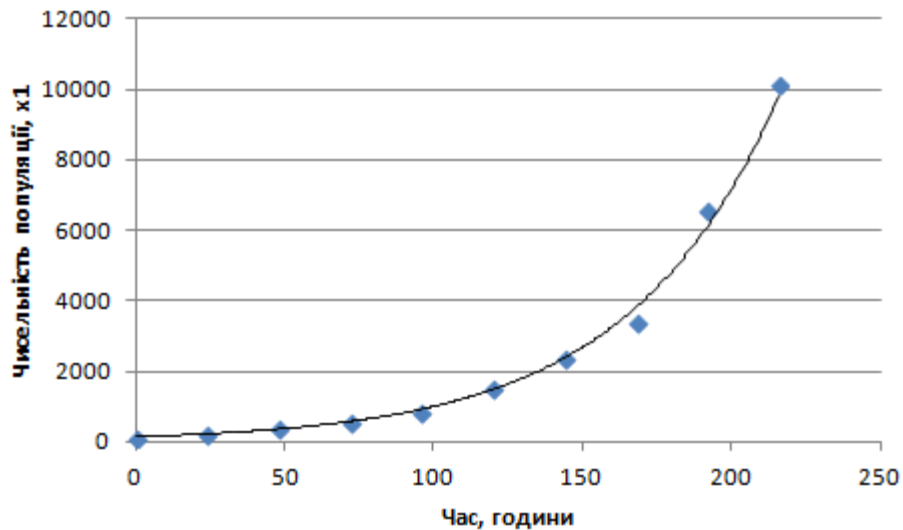


Рис.7. Експоненціальна залежність чисельності популяції від часу при умові нелімітованого росту

Для обробки експериментальних даних використовуємо логарифмічну форму цього рівняння:

$$\ln \frac{N_{\tau}}{N_0} = r \cdot \tau$$

З цієї метою кожний елемент 2-6 стовпця необхідно поділити на відповідний початковий елемент та взяти натуральний логарифм цього відношення (таблиця 3).

Таблиця 3

Час, години	$\ln (N_{1t}/N_{10})$	$\ln (N_{2t}/N_{20})$	$\ln (N_{3t}/N_{30})$	$\ln (N_{4t}/N_{40})$	$\ln (N_{5t}/N_{50})$
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24,00	0,60	0,46	0,63	0,39	0,64
48,00	1,02	1,06	1,13	1,04	0,95
72,00	1,40	1,40	1,50	1,46	1,45
96,00	1,83	1,92	2,01	1,95	1,87
120,00	2,44	2,35	2,59	2,31	2,51
144,00	2,87	3,01	2,84	2,96	3,01
168,00	3,24	3,31	3,57	3,25	3,46
192,00	3,89	3,91	3,95	3,72	3,92
216,00	4,32	4,35	4,28	4,37	4,43

Потім для кожного ставка на основі таблиці 3 будують графік, де по вісі абсцис відкладають час, а по вісі ординат – відповідне значення $\ln (N_t/N_0)$, як це показано на рис.8. Експериментальні дані мають згрупуватися навколо прямої лінії, тангенс кута нахилу якої і є значення мальтузіанського параметра r , що відшукується.

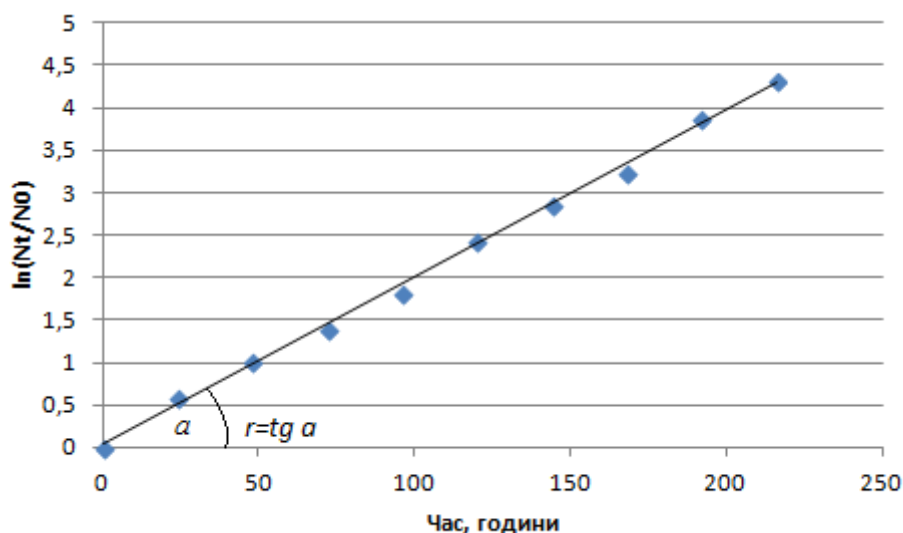


Рис.8. Графічне визначення біотичного потенціалу (лінеаризація експоненціальної залежності)

Значення періоду подвоєння T знаходимо по формулі: $T = \frac{\ln 2}{r}$

Результати обробки даних наведені в таблиці 4.

Таблиця 4

	Ставок 1	Ставок 2	Ставок 3	Ставок 4	Ставок 5
r , година ⁻¹	0,0197	0,0201	0,0198	0,0198	0,0204
T , години	35,19	34,48	35	35	33,98

Медіану визначаємо як середнє значення у вибірці:

$$Me(r) = 0,0198 \text{ година}^{-1}, Me(T) = 35 \text{ годин.}$$

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Час, τ , години	Титр кліток водоростей, кл./мл				
		Ставок 1, x_1	Ставок 2, x_2	Ставок 3, x_3	Ставок 4, x_4	Ставок 5, x_5
1	2	3	4	5	6	7
1	0	135	171	60	252	106
	24	245	270	113	371	201
	48	374	491	186	710	275
	72	545	693	269	1088	451
	96	839	1163	447	1772	689
2	0	145	172	62	242	106
	24	234	279	107	393	181
	48	360	451	172	632	291
	72	553	727	277	1015	468
	96	851	1173	448	1630	752

1	2	3	4	5	6	7
3	0	150	174	61	240	110
	24	231	279	102	387	178
	48	355	448	164	622	286
	72	546	722	265	998	460
	96	840	1162	427	1603	738
4	0	155	173	64	252	115
	24	235	278	103	400	180
	48	362	446	167	642	289
	72	557	717	269	1031	464
	96	857	1151	434	1656	745
5	0	160	167	65	242	108
	24	242	273	104	393	175
	48	372	440	168	632	281
	72	572	710	269	1015	452
	96	879	1146	432	1630	725
6	0	165	168	68	250	120
	24	249	353	108	395	188
	48	383	439	173	634	302
	72	590	708	278	1019	485
	96	907	1142	446	1637	778
7	0	170	169	66	252	108
	24	257	320	106	400	175
	48	395	443	170	642	281
	72	608	681	273	1031	452
	96	935	1047	439	1656	725
8	0	175	166	68	240	114
	24	263	294	108	387	185
	48	405	452	173	622	297
	72	622	695	278	998	476
	96	958	1070	446	1603	765
9	0	180	165	64	250	110
	24	271	276	104	395	178
	48	416	434	168	634	286
	72	641	684	269	1019	460
	96	986	1078	432	1637	738
10	0	185	163	61	242	108
	24	278	271	102	393	175
	48	428	437	164	632	281
	72	659	706	265	1015	452
	96	1014	1139	427	1630	725

Практична робота 2. Модель зміни чисельності популяцій з урахуванням внутрішньовидової конкуренції (модель Ферхюльста)

Мета: вивчити залежність чисельності популяцій від харчових і просторових ресурсів, розширити уявлення про математичні моделі в екології.

Логістична модель зміни чисельності популяції:

Модель динаміки чисельності популяції при обмежених ресурсах запропонував в 1845 (1838?) році французький математик П.Ф.Ферхюльст. Побудова цієї математичної моделі заснована на наступних припущеннях:

- зростання популяції обмежене кількістю харчових ресурсів і доступним простором, придатним для місцеперебування - тобто біологічною ємністю середовища;
- швидкості процесів розмноження, природної загибелі і загибелі в результаті конкурентних конфліктів пропорційні чисельності особин в даний момент часу;
- фізіологічні і біохімічні процеси не враховуються.

Враховується внутрішньовидова конкуренція за місце проживання, за харчові ресурси, яка тим інтенсивніше, чим вище щільність популяції.

- Популяція не взаємодіє з іншими популяціями.

Крива, яка описує уповільнення зростання, що визначається біологічною ємністю середовища називається логістичною кривою.

Введемо позначення:

$N_{(\tau)}$ - чисельність популяції в момент τ ; N_{min} - мінімальна чисельність, яка забезпечує відтворення. Будемо вважати, що середня питома народжуваність виражається позитивною постійною b , що не залежить від часу і розміру популяції, а середня питома смертність в результаті природних причин виражається коефіцієнтом d , також не залежить від часу та щільності популяції.

У міру збільшення щільності популяції зростає число конкурентних конфліктів зі смертельним результатом, ймовірність яких визначається величиною $-\delta N^2$, де δ - коефіцієнт загибелі за рахунок конкурентних конфліктів.

Складемо рівняння динаміки чисельності популяції:

$$\frac{dN}{d\tau} = (b - d - \delta N) \cdot N = rN - \delta N^2; \quad (1)$$

де r - біотичний потенціал популяції ($r = b - d$).

Вирішуємо нелінійне диференціальне рівняння (2):

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{d\tau} = \int_0^\tau (rN - \delta N^2) d\tau \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} - \ln \frac{rN - \delta N^2}{r - \delta N_0} = r\tau. \quad (2)$$

Звідси, рівняння зміни чисельності в інтегральній формі:

$$N(\tau) = \frac{N_0 r}{(r - \delta N_0) e^{-r\tau} + \delta N_0}, \text{ при } \tau \rightarrow \infty \quad N \rightarrow N_{max} = \frac{r}{\delta} \quad (3)$$

Оскільки чисельність популяції в природних умовах ніколи не залишається постійною, а відчуває коливання поблизу максимального значення, характеристичною величиною процесу прийнято вважати $T_{0,9}$ - момент часу, коли чисельність популяції становить 90% від стаціонарної (максимальної). Координати точки перегину N_k графіка $N(\tau)$ - T_k - це критичний момент розвитку, коли починає проявлятися міжвидова конкуренція:

$$N_k = \frac{r}{2\delta} \quad (4)$$

Якщо відомо найбільше число особин при даній екологічній ємності середовища (K або N_{max}), рівняння для побудови моделі набуває вигляду:

$$N_\tau = (b - d)N_0 \frac{K - N_0}{K} + N_0 \quad (5).$$

Завдання 1:

1. Використовуючи вихідні дані побудувати логістичну модель зміни чисельності популяції.

2. Інтерпретувати модель, описавши динаміку популяції за наступними параметрами:

N_{max} - чисельність популяції в стаціонарному стані;

$T_{0,9}$ - характеристичний час, коли чисельність популяції досягає 90% від N_{max} ;

$N_{крит.}$ і $T_{крит.}$ - критична чисельність і час, коли в популяції починає проявлятися внутрішньовидова конкуренція.

3. Зробити прогноз розвитку популяції.

Приклад виконання завдання

Вихідні дані:

Вид тварин	N_{min}	b , од./рік	d , од./рік	δ , од./рік
Кролик	8	4	0,5	0,005

Розрахуємо біотичний потенціал популяції: $r = 4 - 0,5 = 3,5$

Використовуємо рівняння зміни чисельності (3), розрахуємо за допомогою ПК або калькулятора $N(\tau)$ для заданих параметрів згідно варіанту і побудуємо графік зміни чисельності (рис.9):

$$N(\tau) = \frac{N_0 r}{(r - \delta N_0)e^{-r\tau} + \delta N_0} = \frac{8 \cdot 3,5}{(3,5 - 0,005 \cdot 8) \cdot 2,7^{-3,5\tau} + 0,005 \cdot 8}$$

Сформуємо таблицю значень для побудови графіка:

τ , роки	1	3	5	7	11	13	15	17	19	21	23
N , од.											

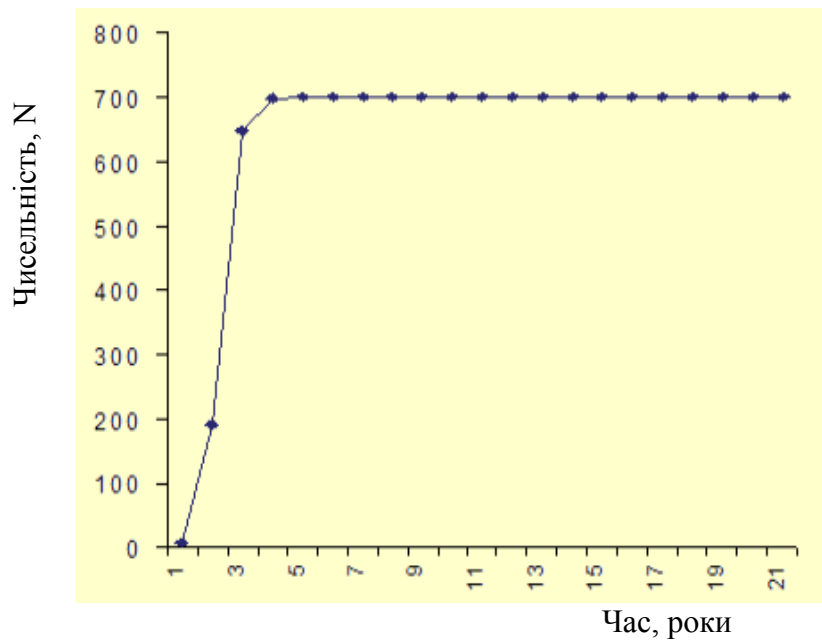


Рис.9.Зміна чисельності по роках

Оцінимо характеристичні величини процесу (3,4):

$N_{max} = 3,5/0,005=700$ особин	$N_{крит} \approx 1/2 N_{max} = 700/2=350$ особин
$T_{0,9} \approx 3,5$ роки (по графіку)	$T_{крит} \approx 3$ роки.

Висновок: Популяція кроликів має позитивний біотичний потенціал і здатна збільшити свою чисельність в даних умовах до 700 особин за 4,5 роки. Перші 3 роки популяція знаходиться в стані активного (експоненціального) росту і по досягненні чисельності в 350 особин основним фактором регуляції чисельності буде внутрішньовидова конкуренція за харчові та просторові ресурси.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Вид тварин	N_{min}	b , од./рік	d , од./рік	δ , од./рік
1	Кролик	10	3	0,3	0,005
2	Дятел	18	1,5	0,2	0,003
3	Косуля	12	0,5	0,05	0,007
4	Їжак амурський	10	3	0,3	0,002
5	Лось	25	0,4	0,04	0,001
6	Амурський тигр	45	0,2	0,08	0,002
7	Іволга	20	1	0,6	0,001
8	Стерх	25	1,2	0,3	0,001
9	Блакитна сорока	15	1,5	0,3	0,001
10	Далекосхідний леопард	30	0,3	0,07	0,001
11	Рись	30	0,3	0,1	0,002
12	Кабан	45	1,2	0,1	0,001
13	Ізюбр	12	0,5	0,3	0,008
14	Вутка мандаринка	23	1,2	0,4	0,001
15	Сіра чапля	15	1,1	0,2	0,001
16	Вовк	2,0	2,0	0,5	0,001

Завдання 2:

У 1937 р на острів Протекшн біля узбережжя штату Вашингтон завезли двох самців і шість самок звичайного фазана (*Phasianus colchicus*). За п'ять років чисельність популяції фазана досягла 1194 особин, що розмножуються, тобто зросла майже в 150 разів. Судячи з деяких ознак, зростання цієї популяції відбувається по логістичній кривій. Від двох самців і шести самок, привезених на острів в 1937 р, вона зросла до 30 особин до весни 1938 року, до 81 - в 1939 р, до 282 - в 1940 р, 641 - в 1941 р, 1194 - в 1942 р і до 1898 - в 1943 р, коли на острів прибули військові частини, і солдати почали полювати на фазанів. Однак, складається враження, що до 1943 чисельність популяції фазанів наче стабілізуватися.

1. Показати, що в даній популяції фазанів спостерігається щільнісно-залежне зростання чисельності.
2. Використовуючи наведені дані про зростання чисельності популяції фазанів знайти для цієї популяції значення параметрів логістичного рівняння Ферхюльста: мальтузіанського параметра r та ресурсного параметра K .

Приклад виконання завдання

Початкова вибірка даних:

Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
Чисельність	8	30	81	282	641	1194	1898

Динаміка чисельності фазанів

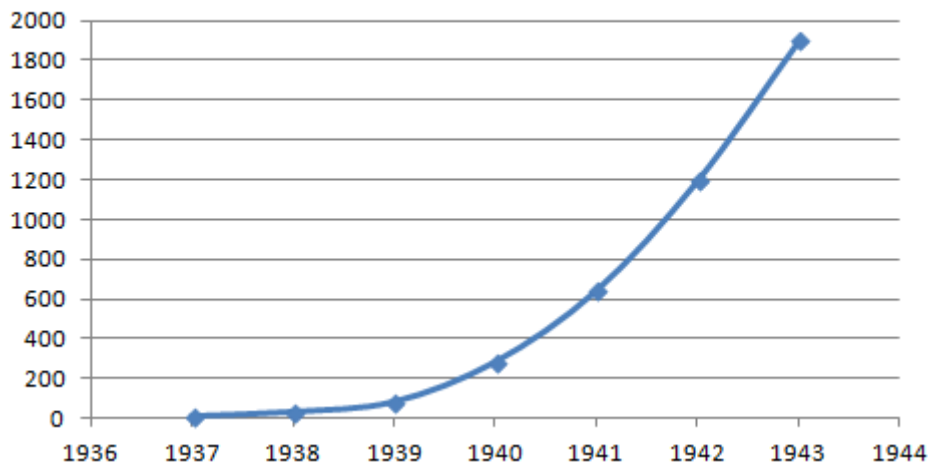


Рис.10. Приріст чисельності фазанів на острові Протекшн по роках

По вигляду кривої здається, що чисельність фазанів змінюється за експоненціальним законом.

Для відповіді на перше питання представимо дані в координатах $\{\ln(N), \tau\}$, де N - чисельність популяції, τ - час. При щільнісно-залежному зростанні дані в зазначених координатах повинні відхилитися від прямої лінії з плином часу, що й спостерігається в нашому випадку (рис.11). Це свідчить про те, що питома швидкість росту зменшується зі збільшенням чисельності.

Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
Чисельність	8	30	81	282	641	1194	1898
$\ln(N)$	2,08	3,40	4,39	5,64	6,46	7,09	7,55

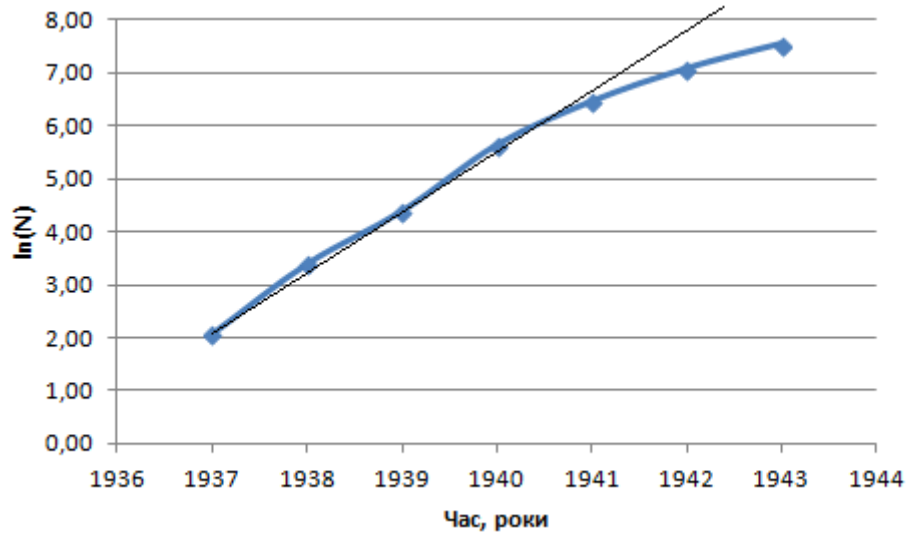


Рис.11. Зміна чисельності популяції фазанів у напівлогарифмічних координатах

Рішення другого питання розіб'ємо на два етапи. На першому етапі використовуємо наближене вираження, одержуване з рівняння Ферхюльста:

$$\frac{1}{\tilde{N}} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta \tau} = r - \frac{r}{K} \cdot \tilde{N}, \quad \text{де} \quad \frac{\Delta N}{\Delta \tau} = \frac{N_{i+1} - N_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \quad \text{та} \quad \tilde{N} = \frac{N_{i+1} + N_i}{2}.$$

Для цього на основі первинних даних розрахуємо додаткові змінні $\frac{1}{\tilde{N}} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta \tau}$ і \tilde{N} , як це зазначено в таблиці 5, та представимо їх у вигляді графіка, де по вісі абсцис будемо відкладати \tilde{N} , а по вісі ординат — $\frac{1}{\tilde{N}} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta \tau}$ (рис.12).

Таблиця 5

Час, τ	Чисельність, N	\tilde{N}	$\frac{1}{\tilde{N}} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta \tau}$	$\ln \frac{N}{K - N}$
1937	8,00	19,00	1,16	-5,74
1938	30,00	55,50	0,92	-4,41
1939	81,00	181,50	1,11	-3,40
1940	282,00	461,50	0,78	-2,06
1941	641,00	917,50	0,60	-1,06
1942	1194,00	1546,00	0,46	-0,09
1943	1898,00			1,15

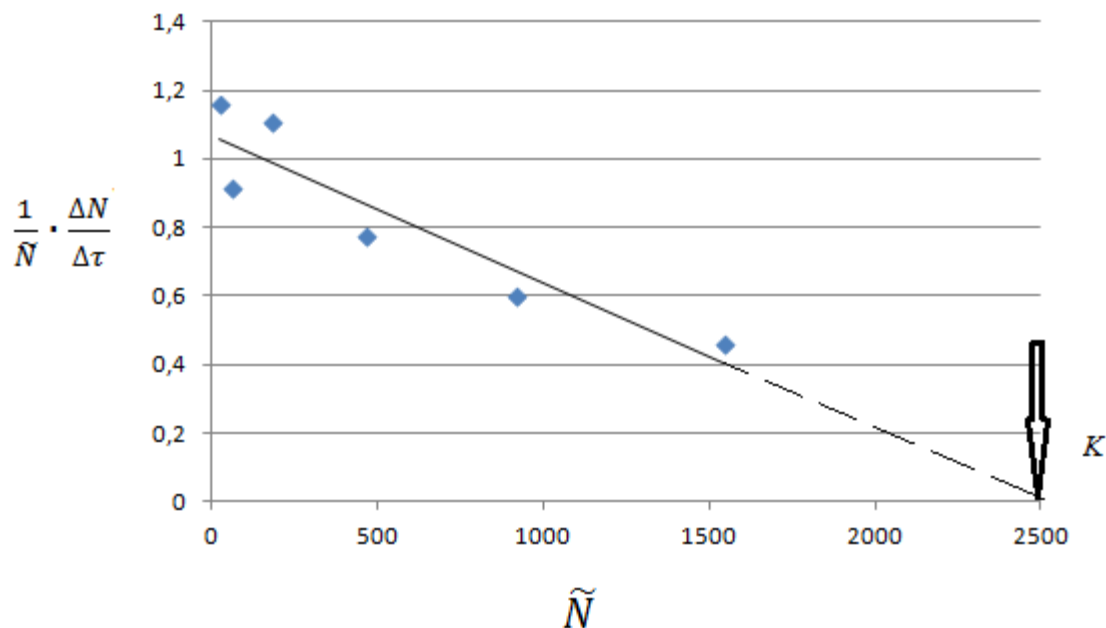


Рис.12. Визначення параметра K по додатковим змінним

Точки на графіку групуються біля прямої лінії, яка відповідно до виразу $\frac{1}{\tilde{N}} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta \tau} = r - \frac{r}{K} \cdot \tilde{N}$ перетинає вісь абсцис у точці, що відповідає величині K (рис.12). У розглянутому випадку величина параметра K дорівнює 2500.

Для визначення параметра r скористаємося інтегральною формою рівняння Ферхюльста в логарифмічному вигляді:

$$\ln \frac{N}{K-N} = \ln \frac{N_0}{K-N_0} + r \cdot \tau \quad (6)$$

На основі ряду N розрахуємо додаткову змінну, як зазначено в таблиці 5, і побудуємо графік для цієї змінної проти змінної τ (рис. 13). Як видно, експериментальні точки групуються біля прямої лінії, тангенс кута нахилу якої відповідно до виразу (6) дає значення параметра r . Для розглянутого випадку $\text{tg}\alpha=1,13$. Враховуючи розмірність шкал одержуємо шукану відповідь $r=1,13 \text{ рік}^{-1}$.

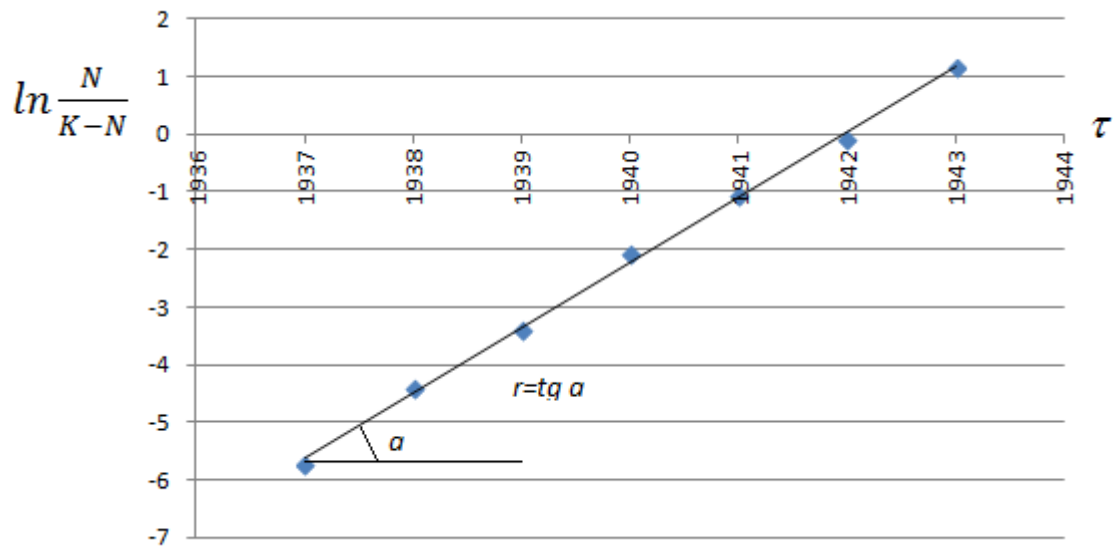


Рис.13. Визначення параметра r по даним таблиці 5.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	10	26	63	150	362	870	2091
Варіант 2	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	12	28	65	154	364	857	2020
Варіант 3	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	14	33	76	178	415	969	2261
Варіант 4	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	16	34	78	183	427	996	2325
Варіант 5	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	20	31	74	177	421	1001	2383
Варіант 6	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	7	24	62	162	421	1098	2858
Варіант 7	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	9	29	72	177	440	1089	2698
Варіант 8	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	11	29	74	185	464	1164	2922
Варіант 9	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	13	35	83	198	470	1119	2665
Варіант 10	Рік	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
	Чисельність	15	35	82	193	454	1070	2522

Завдання 3: У Кузнецькому Алатау на одному з мисливських угідь вівся видобуток соболя. Через деякий час мисливствознавці помітили різке зниження чисельності популяції. Коли чисельність соболя на ділянці впала нижче відомої критичної величини, був зроблений висновок про неконтрольований браконьєрський видобуток. Контрольований промисел був зупинений, та організоване щорічне врахування чисельності популяції соболя. Дані представлені в таблиці 6 і на рис.14.

Час, рік	Чисельність	Час, рік	Чисельність
0	1120	8	1940
1	1147	9	2072
2	1189	10	2173
3	1253	11	2245
4	1346	12	2293
5	1470	13	2324
6	1620	14	2343
7	1784	15	2355

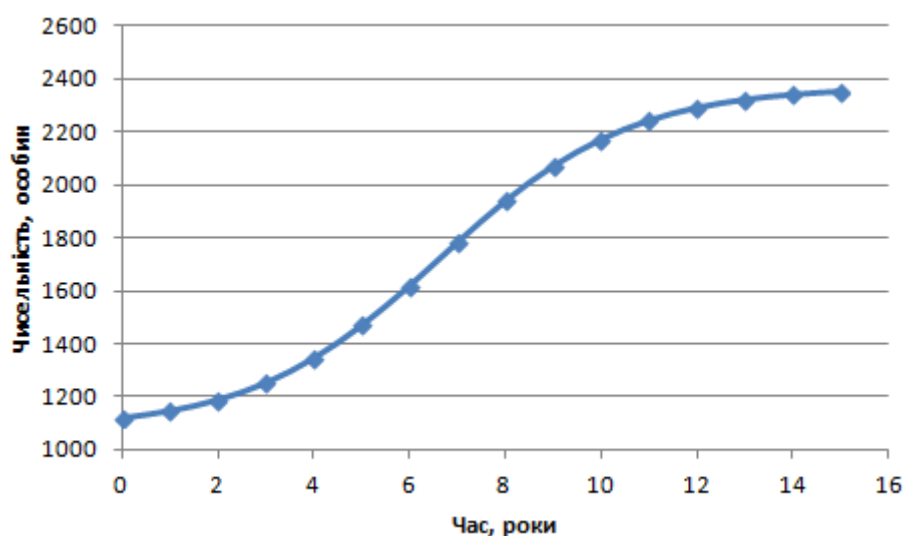


Рис.14. Зміна чисельності популяції соболя після скасування контрольованого видобутку

За даними, представленими в таблиці 6, визначте, скільки соболів в рік браконьєри добували на даній ділянці N_p , які кінетичні параметри популяції соболів на даній ділянці (r і K), яка критична чисельність популяції в умовах браконьєрства $N_{кр}$ і яка критична величина промислу $N_p^{кр}$.

Приклад виконання завдання

Будемо описувати динаміку цієї популяції наступним рівнянням:

$$\frac{dN}{d\tau} = r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) - N_p \quad (7)$$

де r - мальтузіанський параметр, K – ресурсний параметр, N_p – браконьєрський видобуток.

Для рішення на першому етапі використаємо наближену форму даного рівняння:

$$\frac{\Delta N}{\Delta \tau} \approx r \cdot \left(1 - \frac{\tilde{N}}{K}\right) - N_p \quad (8)$$

де $\frac{\Delta N}{\Delta \tau} = \frac{N_{i+1} - N_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}$ та $\tilde{N} = \frac{N_{i+1} + N_i}{2}$.

З цією метою на основі даних про N_i і τ_i розрахуємо додаткові змінні $\frac{\Delta N}{\Delta \tau}$ і \tilde{N} (таблиця 7), а потім побудуємо графік в цих координатах (рис.15). Точки на графіку повинні лягти на криву, перевернуту параболу, яка перетинає вісь абсцис в точках N_1 і N_2 , відповідних стаціонарним рішенням рівняння (7).

Таблиця 7

Час, τ	Чисельність, N	\tilde{N}	$\frac{\Delta N}{\Delta \tau}$	$\ln \frac{N - N_1}{N_2 - N}$
0	1120			-3,60
1	1146	1133	26,9	-3,00
2	1189	1168	42,2	-2,43
3	1253	1221	64,1	-1,90
4	1345	1299	92,4	-1,37
5	1469	1407	123	-0,85
6	1620	1544	150	-0,34
7	1783	1701	163	0,16
8	1939	1861	156	0,67
9	2072	2005	132	1,18
10	2173	2122	101	1,69
11	2245	2209	71,6	2,20
12	2292	2268	47,8	2,71
13	2323	2308	30,7	3,22
14	2342	2333	19,2	3,72
15	2354	2348	11,8	4,23

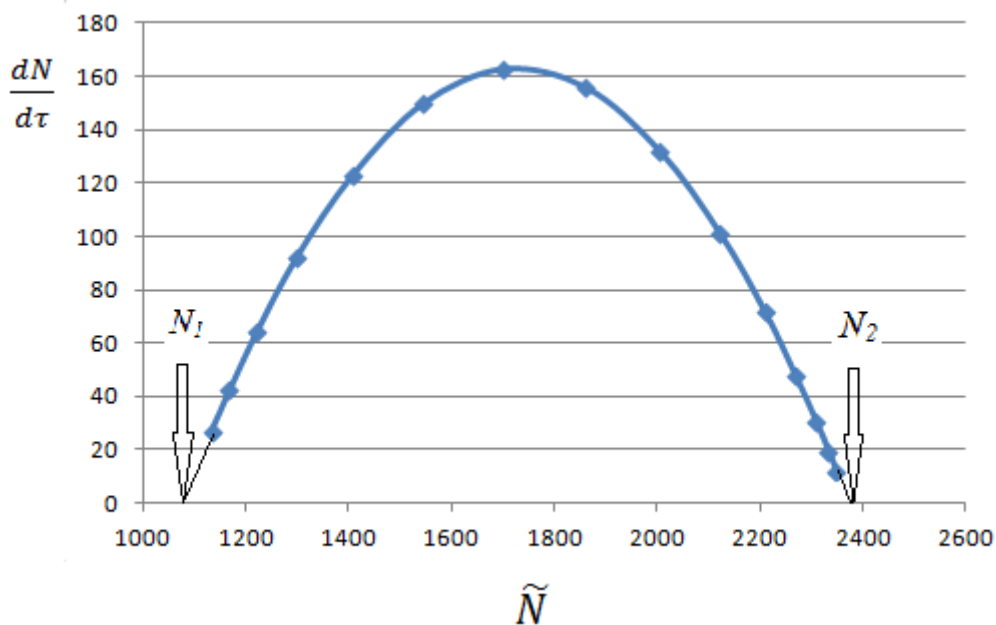


Рис.15. Визначення параметрів N_1 і N_2 , по даним таблиці 7

Для досліджуваної популяції за графіком (рис.15) визначаємо, що $N_1 = 1086$ і $N_2 = 2373$. З цих даних далі визначаємо значення параметра K , оскільки з теорії відомо, що $K = N_1 + N_2$. У нашому випадку $K = 1086 + 2373 = 3459$ особин.

Знання параметра K і значень N_1 і N_2 дозволяє нам використовувати для подальшого вирішення завдання інтегральну форму рівняння (7):

$$\ln \frac{N-N_1}{N_2-N} = \ln \frac{N_0-N_1}{N_2-N_0} + \frac{r}{K} \cdot (N_2 - N_1) \cdot \tau \quad (9)$$

Розрахуємо відповідну додаткову змінну $\ln \frac{N-N_1}{N_2-N}$, як зазначено в таблиці 7 і побудуємо графік для цієї змінної проти змінної τ (рис.16).

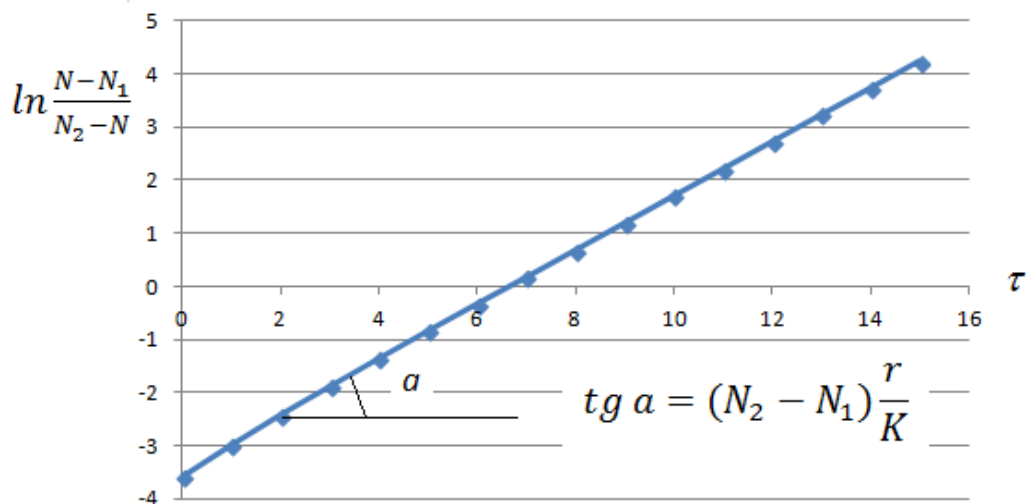


Рис.16. Визначення параметра r по даним таблиці 7

Для цього графіка $\text{tg } \alpha = 0.517$. Далі визначаємо значення параметра r :

$$r = \frac{K \cdot \text{tg } \alpha}{N_2 - N_1} = \frac{3459 \cdot 0,517}{2373 - 1086} = 1,39$$

Враховуючи розмірність вісей отримуємо $r = 1,39 \text{ рік}^{-1}$.

Значення параметра N_p (інтенсивність браконьєрського видобутку) знаходимо з виразу:

$$N_2 - N_1 = K \cdot \sqrt{1 - \frac{4N_p}{rK}},$$

звідки

$$N_p = \frac{rK}{4} \left[1 - \left(\frac{N_2 - N_1}{K} \right)^2 \right] = \frac{1,39 \cdot 3459}{4} \cdot \left[1 - \left(\frac{2373 - 1086}{3459} \right)^2 \right] = 1035.$$

Критична чисельність популяції в умовах браконьєрського видобутку, згідно теорії, дорівнює стаціонарному рішенням N_1 , тому $N_{кр.} = 1086$ особин. Критичну величину промислу $N_p^{кр.}$ визначаємо з співвідношення

$$N_p^{kp} = \frac{rK}{4} = \frac{1,35 \cdot 3459}{4} = 1167 \text{ особин.}$$

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Час, рік	Чисельність	Час, рік	Чисельність
1	2	3	4	5
1	0	1120	8	1940
	1	1147	9	2072
	2	1189	10	2173
	3	1253	11	2245
	4	1346	12	2293
	5	1470	13	2324
	6	1620	14	2343
	7	1784	15	2355
2	0	1130	8	1950
	1	1157	9	2082
	2	1199	10	2183
	3	1263	11	2255
	4	1356	12	2303
	5	1480	13	2334
	6	1630	14	2353
	7	1794	15	2365
3	0	1110	8	1930
	1	1137	9	2062
	2	1179	10	2163
	3	1243	11	2235
	4	1336	12	2283
	5	1460	13	2314
	6	1610	14	2333
	7	1774	15	2345
4	0	1115	8	1935
	1	1142	9	2067
	2	1184	10	2168
	3	1248	11	2240
	4	1341	12	2288
	5	1465	13	2329
	6	1615	14	2338
	7	1779	15	2350
5	0	1105	8	1925
	1	1132	9	2057
	2	1174	10	2158
	3	1238	11	2230
	4	1331	12	2278
	5	1455	13	2319
	6	1605	14	2328
	7	1769	15	2340

1	2	3	4	5
6	0	1100	8	1920
	1	1127	9	2052
	2	1169	10	2153
	3	1233	11	2225
	4	1326	12	2273
	5	1450	13	2314
	6	1600	14	2323
	7	1764	15	2335
7	0	1180	8	2000
	1	1207	9	2132
	2	1249	10	2233
	3	1313	11	2305
	4	1406	12	2353
	5	1530	13	2394
	6	1680	14	2403
	7	1844	15	2415
8	0	1185	8	2005
	1	1212	9	2137
	2	1254	10	2238
	3	1318	11	2310
	4	1411	12	2358
	5	1535	13	2399
	6	1685	14	2408
	7	1849	15	2420
9	0	1190	8	2010
	1	1217	9	2142
	2	1259	10	2243
	3	1323	11	2315
	4	1416	12	2363
	5	1540	13	2404
	6	1690	14	2413
	7	1854	15	2425
10	0	1195	8	2015
	1	1222	9	2147
	2	1264	10	2248
	3	1328	11	2320
	4	1421	12	2368
	5	1545	13	2409
	6	1695	14	2418
	7	1859	15	2430

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення популяції і опишіть її властивості.
2. Чому елементарною частинкою еволюції є популяція?
3. Які критерії популяцій вам відомі?
4. Сформулюйте правила Ю.Одума і К.Фрідерікса.

5. Чим визначається біотичний потенціал популяції?
6. Що таке опір середовища?
7. Які екологічні причини, що викликають зростання чисельності популяцій по експоненті і логістичній кривій?
8. Які екологічні фактори викликають саморегуляцію щільності популяції?
9. Яке значення групових характеристик популяції для охорони біорізноманіття?
10. Що потрібно знати про вид, щоб з достатньою ймовірністю прогнозувати його чисельність?
11. Якщо популяція реагує на власну високу щільність зниженням народжуваності, то чому можливо надмірне розмноження шкідників на полях і в садах?
13. У якої популяції рослин більше шансів на виживання: складається з проростків? з проростків, молодих і дорослих особин? Відповідь обґрунтуйте.
14. Яку інформацію про популяцію необхідно зібрати, щоб встановити норму вилову цінного виду риб?
15. Яким чином характер розподілу популяції в межах ареалу впливає на її стійкість?
16. У чому особливість математичного моделювання в екології популяцій?
17. Які основні етапи побудови імітаційної моделі?
18. У яких випадках в моделюванні доцільно використовувати диференціальні рівняння?
27. Як моделюють динаміку чисельності двох конкуруючих популяцій?
28. У яких випадках застосовують методи математичної статистики при моделюванні в екології?
29. Які типи стійкості можливі у популяції?
30. Які закономірності можна моделювати за допомогою диференціальних рівнянь?

Практична робота 3. Спрощена математична модель взаємовідносин «хижак-жертва» в співтоваристві

Угрупування популяцій біологічних видів, які взаємодіють між собою і беруть важливу участь у функціонуванні екосистеми, називають *біоценозом*. При побудові сучасних моделей біологічних угруповань (біоценозів) різних видів організмів в екології широко використовують таку класифікацію відносин між видами:

- 1) хижацтво (+,-): один вид («хижак») пригнічує розвиток іншого («жертви»), а «жертва» прискорює розвиток «хижака»;
- 2) конкуренція (-,-): кожен вид має пригнічуючий (негативний) вплив на розвиток іншого, хоча існує і внутрішньовидова конкуренція;
- 3) симбіоз (+,+) або коменсалізм (+,0): кожен з видів прискорює розвиток іншого або один вид розвивається, не завдаючи іншому шкоди, але й не приносячи користі.

Якщо розвиток (розмноження) однієї популяції можна описати експоненціальним або логістичним рівняннями, тобто одним з рівнянь:

$$\frac{dN}{d\tau} = r \cdot N; \quad \frac{dN}{d\tau} = r \cdot N - \frac{r}{K} N^2,$$

то вплив іншої популяції описують ще одним додатковим членом, який змінює розвиток першої популяції. Вигляд цього члена рівняння залежить від виду відносин між популяціями.

Нехай маємо дві популяції чисельністю N_1 і N_2 , які взаємодіють між собою. Розмноження кожної з них опишемо логістичним рівнянням, а їхню взаємодію – членом, пропорціональним добутку $N_1 N_2$. Тоді у разі взаємовідносин типу «хижацтво» динаміку популяцій опишемо системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\tau} &= r_1 \cdot N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2; \\ \frac{dN_2}{d\tau} &= r_2 \cdot N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - \gamma_2 N_2 N_1, \end{aligned}$$

де γ_1 – коефіцієнт засвоєння їжі «хижаком», γ_2 – коефіцієнт поїдання «жертви» «хижаком».

При взаємовідносинах типу «конкуренція» динаміку популяцій опишемо системою:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\tau} &= r_1 \cdot N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 - \gamma_1 N_1 N_2; \\ \frac{dN_2}{d\tau} &= r_2 \cdot N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - \gamma_2 N_2 N_1, \end{aligned}$$

а за «симбіозу» - системою рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\tau} &= r_1 \cdot N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2; \\ \frac{dN_2}{d\tau} &= r_2 \cdot N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 + \gamma_2 N_2 N_1. \end{aligned}$$

Переваги наведеної класифікації взаємовідносин полягають у її простоті й логічності. Математичну модель, що описує взаємодію «хижак-жертва», сформулював італійський математик Віто Вольтерра (1860-1940), якого називають батьком математичної екології.

Завдання 1: в деякому замкненому районі живуть хижаки та їх жертви - вовки і зайці. Вовки годуються тільки зайцями, зайці годуються рослинною їжею, якої завжди є в достатку.

Початкова чисельність популяції зайця (жертви) – 1000 особин ($N_{z0} = 1000$).

Початкова чисельність популяції вовка (хижак) – 20 особин ($N_{в0} = 20$).

Частина популяції зайця, що виживає до кінця кожного року збільшує свою чисельність на 30 % ($P_z = 0,3$).

Річний приріст популяції вовків – 10% ($P_v = 0,1$).

Один вовк з'їдає по 40 зайців щорічно ($R_{1в} = 40$)

Смертність зайця по іншим причинам дорівнює нулю. Смертність вовків дорівнює нулю.

Питання №1.

Умова: Розрахувати, якою буде чисельність популяції зайця через 1,3,5 та 10 років при повній відсутності вовків. Відобразити зміни чисельності зайців впродовж даного періоду графічно.

Питання №2.

Умова: Розрахувати, якою буде чисельність популяції зайця через 1,3,5 та 10 років, якщо початкова чисельність вовків складає 20 особин і не змінюється впродовж указанного часу. Відобразити зміни чисельності зайців впродовж даного періоду графічно. Порівняти результат с результатами питання №1.

Питання №3.

Умова: Розрахувати, якою буде чисельність популяції зайця через 1,3,5 та 10 років, якщо початкова чисельність вовків складає 20 особин і збільшується на 10% щорічно. Відобразити зміни чисельності зайців впродовж даного періоду графічно. Порівняти результат з результатами питань №1 і №2.

Питання №4.

Умова: Розрахувати, якою має бути початкова чисельність популяції вовків, що збільшується, щоб чисельність зайців була відносно стабільною (тобто дорівнювалась приблизно 1000) впродовж перших п'яти років існування популяції. Як буде змінюватись чисельність популяції зайця впродовж наступних п'яти років? Відобразить дані графічно.

Приклад виконання завдання

У комірки першу строку таблиці Excel вносимо константи, що входять в умову:

A1 – початкова чисельність зайців, $N_{30} = 1000$;

B1 – щорічне збільшення популяції зайців, $P_z = 0,3$;

C1 – початкова чисельність вовків, $N_{B0} = 20$;

D1 – кількість зайців, що з'їдає один вовк за рік, $R_{1B} = 40$;

E1 – річний приріст чисельності вовків, $P_B = 0,1$

В екології початковим роком прийнято рахувати «нульовий» рік, тому роки пронумеруємо від 0 до 10.

Для відповіді на *питання №1* використовуємо формулу $N_z = N_{30} + N_{30} * P_z$, заповнюємо стовпчик B. Формула для обчислення у комірці B6: $=B5+B5*\$B\1 .

Комірки B7 – B15 заповнюємо вниз по зразку.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E	F	G	H
1	1000	0,3	20	40	0,1	1	1000	0,3	20	40	0,1			
2	Зайці (умова)				Вовки (умова)									
3	Роки	Зайці			Вовки									
4		Питання1	Питання2	Питання3	Питання4	4	Питання1	Питання2	Питання3	Питання4	Питання2	Питання3	Питання4	
5	0	=A\$1	=A\$1	=A\$1	=A\$1	5	0	1000	1000	1000	1000			
6	1	=B5+B5*\$B\$1				6	1	1300						
7	2	=B6+B6*\$B\$1				7	2	1690						
8	3	=B7+B7*\$B\$1				8	3	2197						
9	4	=B8+B8*\$B\$1				9	4	2856						
10	5	=B9+B9*\$B\$1				10	5	3713						
11	6	=B10+B10*\$B\$1				11	6	4827						
12	7	=B11+B11*\$B\$1				12	7	6275						
13	8	=B12+B12*\$B\$1				13	8	8157						
14	9	=B13+B13*\$B\$1				14	9	10604						
15	10	=B14+B14*\$B\$1				15	10	13786						
16						16								

Для відповіді на питання №2 для популяції вовків заповнюємо комірки F5–F15. Привласнюємо F5=\$C\$1, далі копіюємо вниз по зразку (популяція вовка не змінюється по умові). Для популяції зайців використовуємо комірки C5–C15. Привласнюємо C5=\$C\$1. Використовуємо формулу

$$N_3 = (N_{30} - N_{B0} * R_{1B}) * (1 + P_3),$$

заповнюємо стовпчик C.

Формула для обчислення у комірці C6: =(C5-F5*\$D\$1)*(1+\$B\$1). Комірки C7–C15 заповнюємо вниз по зразку.

A	B	C	D	E	F	
1	1000	0,3	20	40	0,1	
2	Зайці (умова)		Вовки (умова)			
3	Роки	Зайці				Вовки
4	Питання1	Питання2	Питання3	Питання4	Питання2	
5	0	=A\$1	=A\$1	=A\$1	=C\$1	
6	1	=B5+B5*\$B\$1	=(C5-F5*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
7	2	=B6+B6*\$B\$1	=(C6-F6*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
8	3	=B7+B7*\$B\$1	=(C7-F7*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
9	4	=B8+B8*\$B\$1	=(C8-F8*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
10	5	=B9+B9*\$B\$1	=(C9-F9*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
11	6	=B10+B10*\$B\$1	=(C10-F10*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
12	7	=B11+B11*\$B\$1	=(C11-F11*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
13	8	=B12+B12*\$B\$1	=(C12-F12*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
14	9	=B13+B13*\$B\$1	=(C13-F13*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
15	10	=B14+B14*\$B\$1	=(C14-F14*\$D\$1)*(1+\$B\$1)		=C\$1	
16						

Для відповіді на питання №3 для популяції вовків використовуємо комірки G5–G15. Привласнюємо G5=\$C\$1. Використовуємо вираз $N_B = N_{B0} + N_{B0} * P_B$. Формула для обчислення у комірці G6: =G5+G5*\$E\$1.

Для популяції зайців використовуємо комірки D5–D15. Привласнюємо D5=\$A\$1. Використовуємо вираз $N_3 = (N_{30} - N_{B0} * R_{1B}) * (1 + P_3)$. Формула для обчислення у комірці D6: =(D5-G5*\$D\$1)*(1+\$B\$1). Комірки D7–D15 заповнюємо вниз по зразку.

A	B	C	D	E	F	G
1	1000	0,3	20	40	0,1	
2	Зайці (умова)		Вовки (умова)			
3	Роки	Зайці				Вовки
4	Питання1	Питання2	Питання3	Питання4	Питання2	Питання3
5	0	=A\$1	=A\$1	=A\$1	=C\$1	=C\$1
6	1	=B5+B5*\$B\$1	=(C5-F5*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D5-G5*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G5+G5*\$E\$1
7	2	=B6+B6*\$B\$1	=(C6-F6*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D6-G6*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G6+G6*\$E\$1
8	3	=B7+B7*\$B\$1	=(C7-F7*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D7-G7*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G7+G7*\$E\$1
9	4	=B8+B8*\$B\$1	=(C8-F8*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D8-G8*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G8+G8*\$E\$1
10	5	=B9+B9*\$B\$1	=(C9-F9*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D9-G9*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G9+G9*\$E\$1
11	6	=B10+B10*\$B\$1	=(C10-F10*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D10-G10*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G10+G10*\$E\$1
12	7	=B11+B11*\$B\$1	=(C11-F11*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D11-G11*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G11+G11*\$E\$1
13	8	=B12+B12*\$B\$1	=(C12-F12*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D12-G12*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G12+G12*\$E\$1
14	9	=B13+B13*\$B\$1	=(C13-F13*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D13-G13*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G13+G13*\$E\$1
15	10	=B14+B14*\$B\$1	=(C14-F14*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D14-G14*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G14+G14*\$E\$1
16						

Для відповіді на питання №4 необхідно підібрати таку початкову кількість вовків, при якій чисельність зайців буде мінімально змінюватись впродовж перших п'яти років існування. Підбирати початкове число будемо в комірці H1. Тому комірці H5 привласнюємо значення \$H\$1. Формула для обчислення у комірці H6: =H5+H5*\$E\$1.

Для популяції зайців використовуємо комірки E5–E15. Формула для обчислення у комірці E6: =(E5-H5*\$D\$1)*(1+\$B\$1). Змінюючи число в комірці H1, підбираємо значення в комірках E5–E9, які приблизно дорівнюють 1000. Такими значеннями будуть 5 і 6. Найбільш вдале значення – 6 (початкова популяція вовків).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1000	0,3	20	40	0,1			6
2	Зайці (умова)		Вовки (умова)					
3	Роки	Зайці				Вовки		
4		Питання1	Питання2	Питання3	Питання4	Питання2	Питання3	Питання4
5	0	=A\$1	=A\$1	=A\$1	=A\$1	=C\$1	=C\$1	=H\$1
6	1	=B5+B5*\$B\$1	=(C5-F5*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D5-G5*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E5-H5*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G5+G5*\$E\$1	=H5+H5*\$E\$1
7	2	=B6+B6*\$B\$1	=(C6-F6*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D6-G6*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E6-H6*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G6+G6*\$E\$1	=H6+H6*\$E\$1
8	3	=B7+B7*\$B\$1	=(C7-F7*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D7-G7*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E7-H7*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G7+G7*\$E\$1	=H7+H7*\$E\$1
9	4	=B8+B8*\$B\$1	=(C8-F8*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D8-G8*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E8-H8*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G8+G8*\$E\$1	=H8+H8*\$E\$1
10	5	=B9+B9*\$B\$1	=(C9-F9*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D9-G9*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E9-H9*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G9+G9*\$E\$1	=H9+H9*\$E\$1
11	6	=B10+B10*\$B\$1	=(C10-F10*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D10-G10*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E10-H10*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G10+G10*\$E\$1	=H10+H10*\$E\$1
12	7	=B11+B11*\$B\$1	=(C11-F11*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D11-G11*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E11-H11*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G11+G11*\$E\$1	=H11+H11*\$E\$1
13	8	=B12+B12*\$B\$1	=(C12-F12*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D12-G12*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E12-H12*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G12+G12*\$E\$1	=H12+H12*\$E\$1
14	9	=B13+B13*\$B\$1	=(C13-F13*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D13-G13*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E13-H13*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G13+G13*\$E\$1	=H13+H13*\$E\$1
15	10	=B14+B14*\$B\$1	=(C14-F14*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(D14-G14*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=(E14-H14*\$D\$1)*(1+\$B\$1)	=C\$1	=G14+G14*\$E\$1	=H14+H14*\$E\$1
16								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1000	0,3	20	40	0,1			6
2	Зайці (умова)		Вовки (умова)					
3	Роки	Зайці				Вовки		
4		Питання1	Питання2	Питання3	Питання4	Питання2	Питання3	Питання4
5	0	1000	1000	1000	1000	20	20,0	6
6	1	1300,0	260,0	260,0	988,0	20	22,0	6,6
7	2	1690,0	-702,0	-806,0	941,2	20	24,2	7,3
8	3	2197,0	-1952,6	-2306,2	846,0	20	26,6	8,0
9	4	2856,1	-3578,4	-4382,3	684,6	20	29,3	8,8
10	5	3712,9	-5691,9	-7219,7	433,2	20	32,2	9,7
11	6	4826,8	-8439,5	-11060,5	60,6	20	35,4	10,6
12	7	6274,9	-12011,3	-16221,0	-473,9	20	39,0	11,7
13	8	8157,3	-16654,7	-23114,0	-1224,1	20	42,9	12,9
14	9	10604,5	-22691,1	-32277,6	-2260,1	20	47,2	14,1
15	10	13785,8	-30538,4	-44413,1	-3673,8	20	51,9	15,6
16								

Рис.17. Таблиця з розрахованими значеннями.

За результатами розрахунків наведемо графічне представлення даних.

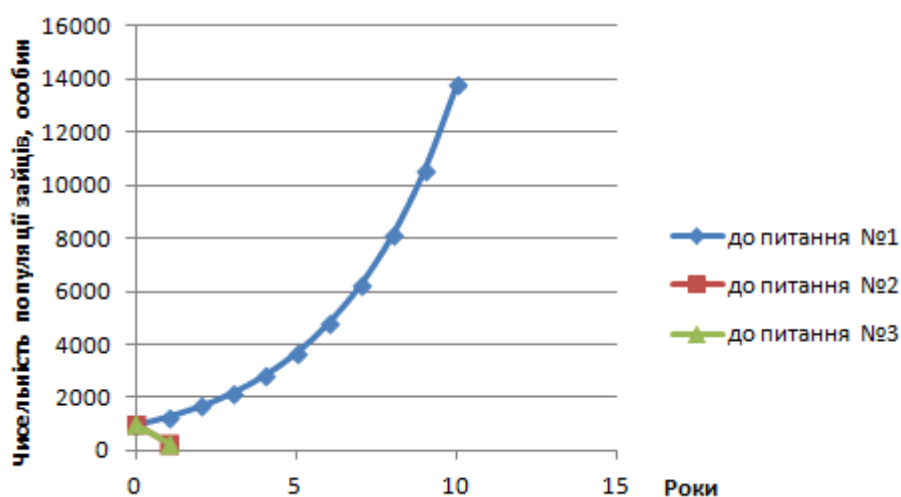


Рис.18. Динаміка чисельності популяції зайців впродовж 10 років (до питань 1,2,3)

Перед тим, як аналізувати отриманні данні, необхідно пам'ятати, що завдання мають біологічний сенс, тобто всі отримані в результаті розрахунків значення повинні бути цілими невід'ємними числами, так як всі вони вказують на абсолютну кількість тварин і, отже, не можуть бути ні негативними, ні дробовими; з погляду екології потрібно не округляти значення, а брати цілу частину числа шляхом відкидання дробової частини, оскільки в реальній популяції можна враховувати тільки "цілих" тварин (так, число 3860,8 перетворюється на число 3860), це не округлення і тому не йде врозріз зі знаннями про правила округлення чисел; при підборі початкової чисельності хижаків в питанні 4 (комірки Н1 і Н5) треба стежити, щоб виконувалися всі умови задачі. Так, якщо приймаємо в якості значення цілу частину числа, початкова кількість вовків (С1) повинна бути більше або дорівнює 10, оскільки при значеннях менше 10 чисельність популяції вовків не може рости. Наприклад, якщо число тварин дорівнює 4, то при прирості в 10% на наступний рік отримаємо: $4 + 4 \cdot 0,1 = 4,4$. Взявши цілу частину числа 4,4, отримаємо 4 вовки, як і в попередній рік, а це суперечить умові задачі.

Аналіз кривих: при порівнянні трьох графіків можна судити про вплив кількості вовків на популяцію зайця. При відсутності хижаків кількість особин в популяції стрімко зростає (питання №1), так як зростання чисельності зайців нічим не стримується. При наявності невеликої популяції вовка (20 особин) популяція зайця впродовж двох років зберігається на колишньому рівні, а потім зникає. Тут грає роль досить велика кількість вовків. 20 вовків цілком здатні винищити протягом 3 років популяцію зайця з 1000 особин, незважаючи на те, що річний приріст популяції зайця - 30%, а річний приріст популяції вовка дорівнює нулю. При річному прирості чисельності вовків в 10%, крива популяції зайців стрімко падає після 2 років існування на одному рівні.

Для ілюстрації питання №4 побудуємо гістограму.

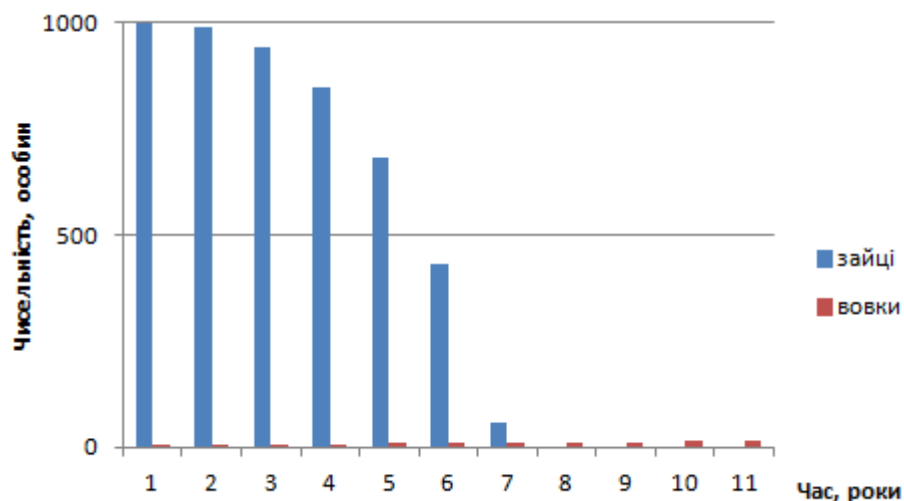


Рис.19. Динаміка чисельності популяцій зайця та вовка впродовж 10 років (до питання 4)

При вивченні гістограми можна зробити наступні висновки: порівняно невелика популяція вовка з шести особин здатна стримувати зростання популяції

зайця та протягом перших двох років існування підтримувати її на приблизно одному рівні.

Потім зростання популяції починає зменшуватися і до кінця сьомого року зайці вимирають. Популяція вовка продовжує зростати. Звернемо увагу на те, що незважаючи на повне вимирання зайців через 7 років, кількість хижаків продовжує збільшуватися. Оскільки в умові нічого не сказано щодо інших жертв вовка, можна вважати зайця єдиною жертвою. Тоді зростання чисельності хижаків у відсутності їжі пояснюється помилкою в побудові моделі.

Індивідуальне завдання

Скласти спрощену математичну модель взаємовідносин хижака і жертви в співтоваристві. Початкова чисельність популяції оленя (жертви) становить 2000 особин. Оленями харчуються два хижаки - вовк і пума. Частина популяції оленів, що виживає до кінця кожного року, збільшує свою чисельність на 40%. Початкова чисельність популяції вовків становить 15 особин, один вовк з'їдає по 30 оленів щорічно, річний приріст популяції вовків становить 10%. Початкова чисельність пум невідома, одна пума споживає по 20 оленів щорічно, річний приріст популяції пум становить 20%. Смертність оленів з інших причин дорівнює нулю. Смертність вовків і пум дорівнює нулю.

Питання 1. Розрахуйте, якою буде чисельність оленів через 1, 3, 5 і 10 років при повній відсутності хижаків. Відобразіть зміни чисельності оленів і протягом даного періоду часу графічно.

Питання 2. Розрахуйте, якою буде чисельність оленів через 1, 3, 5 і 10 років, якщо початкова чисельність вовків становить 15 особин і не змінюється протягом зазначеного періоду часу. Відобразіть зміни чисельності оленів впродовж даного періоду часу графічно. Порівняйте отриманий результат з результатом питання 1.

Питання 3. Розрахуйте, якою буде чисельність оленів через 1, 3, 5 і 10 років, якщо початкова чисельність вовків становить 15 особин і зростає на 10% щорічно. Відобразіть зміни чисельності оленів впродовж даного періоду часу графічно. Порівняйте отриманий результат з результатами питання 1 і питання 2.

Питання 4. Розрахуйте, якою має бути початкова чисельність зростаючої популяції вовків, щоб чисельність оленів була відносно стабільною (тобто дорівнювала приблизно 2000) протягом перших п'яти років існування популяції. Як буде змінюватися чисельність популяції оленів протягом наступних п'яти років? Відобразіть усі отримані дані графічно.

Питання 5. Розрахуйте, якою має бути початкова чисельність вовків і пум, щоб чисельність оленів була відносно стабільною (тобто дорівнювала приблизно 2000) протягом перших п'яти років існування популяції. Як буде змінюватися чисельність популяції оленів протягом наступних п'яти років? Відобразіть всі отримані дані графічно.

Література

1. Николайкин Н. И. Экология: Учебное пособие / Н. И. Николайкин, Н. Е. Николайкина, О. П. Мелехова. — М.: Дрофа, 2003. — 624 с.
2. Экология: Учебное пособие / Под ред. проф. В. В. Денисова. — Ростов н/Д : Издательский центр "Март", 2002. — 640 с.
3. Практикум по биофизике: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. Ф. Федоров, А. М. Черныш, В. И. Пасечник и др. — М.: ВЛАДОС, 2001. — 352 с.
4. Кормилицын В. И. Основы экологии: Учеб. пособие / В. И. Кормилицын, М. С. Цицкишвили, Ю. И. Яламов. — М.: МПУ, 1997. — 368 с.
5. Гроссман С. Математика для биологов: пер. с англ. / С. Гроссман, Дж. Тернер. — М.: Высшая школа, 1983.—383 с.
6. Брем А. Жизнь животных / А Брем. — М.: ЭКСМО, 2003. — 960 с.
7. Экология: учебник для технических вузов / Л. И. Цветкова, М. И. Алексеев и др.; под ред. Л. И. Цветковой.— М.: Изд-во АСВ, СПб.: Химиздат, 2001 г.- 552 с.
8. Абросов Н. С. Экологические факторы и механизмы формирования видового разнообразия экосистем и проблема совместимости видов // Экология в России на рубеже XXI века. / Н. С. Абросов — М.: Научный мир, 1999. — с.54 — 69.
9. Болсуновский А. Я. Эколого-биофизические механизмы доминирования микроводорослей в культуре и водоеме. : Автореф. дис... д-ра биол. наук / А. Я. Болсуновский — Красноярск, 1999. — 48 с.
10. Гаузе Г. Ф. Исследования над борьбой за существование в смешанных популяциях // Зоол. журн./ Г. Ф. Гаузе. — 1935. 14, N.4. — с.243 — 270.
11. Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов: Учебное пособие./ Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. — 302 с.
12. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ./ Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
13. Уильямсон М. Анализ биологических популяций./ М. Уильямсон. — М.: Мир, 1975. —
271 с.

Учбове видання

МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійного виконання завдань
для студентів денної та заочної форм навчання за напрямом
"Екологія, охорона навколишнього середовища
та збалансоване природокористування"

У к л а д а ч :

Інна Василівна КРАВЧЕНКО

Редактор	<i>І.В.Кравченко</i>
Техн. редактор	<i>І.В.Кравченко</i>
Оригінал-макет	<i>І.В.Кравченко</i>

Підписано до друку _____

Формат 60x84^{1/16}. Папір типограф. Гарнітура Times.

Печатка офсетна. Ум. друк. 2,5.

Тираж _____ Вид. № _____ Замовлення № _____

**Видавництво Східноукраїнського національного університету
ім. Володимира Даля**

Адреса видавництва: 93400, м. Сєверодонецьк, Луганська обл.,
пр. Центральний, 59а